

UNIVERSIDAD DE ORIENTE
 NÚCLEO BOLÍVAR
 UNIDAD DE ESTUDIOS BÁSICOS
 ÁREA DE MATEMÁTICAS
 MATERIA: MATEMÁTICAS IV
 PROF: JOSÉ GREGORIO PÁEZ V.

UNIDAD I.
 ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN
 EJERCICIOS

1.- Obtenga la Ecuación Diferencial que da origen a cada una de las siguientes soluciones.

- a. $y = \text{sen}(x) - 1 + ce^{-\text{sen}x}$ $R: \frac{dy}{dx} = \text{Cos}(x)(1 - ce^{-\text{sen}x}) \quad c : \text{const.}$
- b. $y = c_1x + \frac{c_2}{x} + c_3$ $R: \frac{dy}{dx} = c_1 - \frac{c_2}{x^2}$
- c. $y = c_1e^{b\text{sen}^{-1}x} + c_2e^{-b\text{sen}^{-1}x}$ $R: \frac{dy}{dx} = b.\text{ctg}(x).\text{Csc}(x) \left[-c_1e^{b/\text{sen}x} + c_2e^{-b/\text{sen}x} \right]$
- d. $y = cx + c - c^2$ $R: \frac{dy}{dx} = c$
- e. $y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^{-x}$ $R: \frac{dy}{dx} = e^x(c_1 + c_2 + c_2x) - c_3e^{-x}$
- f. $y = e^{cx}$ $R: \frac{dy}{dx} = ce^{cx}$

2.- Demuestre que las siguientes Ecuaciones Diferenciales aceptan como solución la función que se indica en cada caso.

- a. $y'' + y = 0,$ $\{y = c_1 \cos x + c_2 \text{sen}x\}$
- b. $y'' - 2k.y' + k^2 y = e^x,$ $\left\{ y = (c_1 + c_2x)e^{kx} + \frac{e^x}{(k-1)^2} \right\}$
- c. $y'' - 3y' + 2y = 0,$ $\{y = c_1e^x + c_2e^{2x}\}$
- d. $y' + 3y = 0,$ $\{y = ce^{-3x}\}$
- e. $(x - y^2x)dx + (y - x^2y)dy = 0,$ $\{x^2 + y^2 = x^2y^2 + c\}$

3.- Hallar la solución general para las siguientes Ecuaciones Diferenciales de Variables Separables.

- a. $xyy' - y^2 + x^3yy' - 1 = 0$ $R: \frac{1}{2} \ln|y^2 + 1| = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|1 + x^2| + C$
- b. $y' = x - 1 + xy - y$ $R: \ln|1 + y| = \frac{x^2}{2} - x + C$
- c. $y' = (y - 1)(y - 2)$ $R: -\ln|y - 1| + \ln|y - 2| = x + C$
- d. $xy + y'e^{x^2} \cdot \ln(y) = 0$ $R: \ln^2|y| = \frac{1}{2}e^{-x^2} + C$

e. $\operatorname{tg}(x)\cos(y) = -y'\operatorname{tg}(y)$	$R: -\ln \cos(x) = -\frac{1}{\cos(y)} + C$
f. $y' + y\operatorname{sen}(x) = 0$	$R: y = e^{\cos x} \cdot C$
g. $L \frac{di}{i} + Rdt = 0$	$R: i = e^{-LRt} \cdot C$
h. $2ydx + (xy + 5x)dy = 0$	$R: 2\ln x = -y - 5\ln y + C$
i. $\frac{dx}{dy} = \frac{x^2 y^2}{1+x}$	$R: -\frac{1}{x} + \ln x - \frac{y^3}{3} = C$
j. $y \cdot \ln x \cdot \frac{dx}{dy} = \left(\frac{y+1}{x}\right)^2$	$R: \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{9}x^3 = \frac{y^2}{2} + 2y + \ln y + C$
k. $e^y \operatorname{sen}(2x)dx + \cos(x)(e^{2y} - y)dy = 0$	$R: -2\cos(x) = -e^y - ye^{-y} - e^{-y} + C$
l. $(y - yx^2) \frac{dy}{dx} = (y+1)^2$	$R: \ln y+1 + \frac{1}{y+1} = \frac{1}{2}\ln 1+x - \frac{1}{2}\ln 1-x + C$
m. $(e^x + e^{-x}) \frac{dy}{dx} = y^2$	$R: -\frac{1}{y} = \operatorname{tg}^{-1}(e^x) + C$

4.- Hallar una solución particular de la Ecuación Diferencial para la condición dada.

a. $2y^2 y' = 3y - y', \quad \{x=3, y=1\}$	$R: y^2 + \ln y = 3x - 8$
b. $dp = p \operatorname{ctg}(\theta) \cdot d\theta, \quad \{\theta = \pi/2, p = 2\}$	$R: p = 2\operatorname{sen}(\theta)$
c. $xdy - (2x+1)e^{-y} dx = 0 \quad \{x=1, y=2\}$	$R: e^y = 2x + \ln x + e^2 - 2$
d. $(xy+x)dx + \sqrt{4+x^2} dy = 0, \quad \{x=0, y=1\}$	$R: \sqrt{4+x^2} = -\ln y+1 + 2 + \ln 2 $

5.- Determine una solución a cada una de las Ecuaciones Diferenciales a continuación.

a. $y' = -\frac{x+y}{x}$	$R: \ln x = -\frac{1}{2}\ln\left \frac{2y}{x} + 1\right + C$
b. $(x-y)ydx - x^2 dy = 0$	$R: x = C \cdot e^{x/y}$
c. $3xydx + (2y^2 - x^2)dy = 0$	$R: 2\ln x = \ln y/x - \frac{3}{2}\ln 1 + y^2/x^2 + C$
d. $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$	$R: \frac{1}{2}\ln x = -\frac{1}{2}\ln\left \frac{y}{x} + 1\right - \frac{1}{2}\ln\left \frac{y}{x} - 1\right + C$
e. $(x-y)dx + xdy = 0$	$R: y = -x\ln x + xC$
f. $x \cdot dx + (y-2x)dy = 0$	$R: -\ln x = \ln\left \frac{y}{x} - 1\right + \frac{1}{\frac{y}{x} - 1} + C$
g. $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}$	$R: -\ln x = \frac{1}{2}\ln\left \frac{y^2}{x^2} + 1\right + \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + C$

6.- Resuelva cada una de las siguientes Ecuaciones Exactas.

- a. $3y + e^x + (3x + \cos y) \cdot y' = 0$ $R: f(x, y) = 3xy + e^x + \text{sen}y$
- b. $(2xy^{-1} + y^2)dx + (2xy - x^2y^{-2})dy = 0$ $R: f(x, y) = \frac{x^2}{y} + y^2x + C$
- c. $(\text{sen}y - y\text{sen}x)dx + (x\cos y + \cos x)dy = 0$ $R: f(x, y) = x\text{sen}y + y\cos x + C$
- d. $\frac{2x}{y}dx + \left(1 - \frac{x^2}{y^2}\right)dy = 0$ $R: f(x, y) = \frac{x^2}{y} + y$
- e. $(2x + e^y)dx + xe^y dy = 0$ $R: f(x, y) = x^2 + xe^y + C$
- f. $(x^3 + xy^2 + x^2)dx + x^2y dy = 0$ $R: f(x, y) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^3}{3} + C$
- g. $(2y^2x - 3)dx + (2yx^2 + 4)dy = 0$ $R: y^2x^2 - 3x + 4y = C$
- h. $(y^3 - y^2\text{sen}x - x)dx + (3xy^2 + 2y\cos x)dy = 0$ $R: xy^3 + y^2\cos x - \frac{x^2}{2} = C$

7.- Resolver las siguientes Ecuaciones Diferenciales Lineales de Primer Orden.

- a. $y' + 2y = e^{2x}$ $R: y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$
- b. $y' - 3y = 2$ $R: y = c_1 + c_2e^{3x}$
- c. $xy' + y + x = e^x$ $R: xy = e^x + \frac{x^2}{2} + C$
- d. $xy' - 3y = x^5$ $R: \ln^2|y| = \frac{1}{2}e^{-x^2} + C$
- e. $xy' + (1+x)y = 5$ $R: xe^x y = 5e^x + C$
- f. $xy' - y = x^2 + x, \text{ con } x=1, y=2$ $R: y = \frac{x^2}{3} + \frac{x}{2} + \frac{7}{6x}$
- g. $y' + 2xy - e^{-x^2} = x, \text{ con } x=0, y=1$ $R: y = \frac{1}{2} + xe^{-x^2} + \frac{e^{-x^2}}{2}$
- h. $x\frac{dy}{dx} + (3x+1)y = e^{-3x}$ $R: y = e^{-3x} + \frac{ce^{-3x}}{x}$
- i. $ydx - 4(x + y^6)dy = 0$ $R: x = 2y^6 + cy^4$ Use $\frac{dx}{dy}$
- j. $ydx + (x + 2xy^2 - 2y)dy = 0$ $R: x = \frac{1}{y} + \frac{ce^{-y^2}}{y}$ Use $\frac{dx}{dy}$
- k. $(x+2)^2\frac{dy}{dx} = -5 - 8y - 4xy$ $R: y = \frac{5}{x+2} + \frac{c}{(x+2)^4}$

8.- Determine la solución de las siguientes Ecuaciones Diferenciales.

a.	$x \frac{dy}{dx} + y = y^{-2}$	R:	$x = c(1 - y^3)^{-1/3}$
b.	$\frac{dy}{dx} = y(xy^3 - 1)$	R:	$x = y^{-3} - \frac{1}{3} - ce^{3x}$
c.	$\frac{dy}{dx} = (x + y + 1)^2$	R:	$y = -x - 1 + tg(x - c)$
d.	$\frac{dy}{dx} = tg^2(x + y)$	R:	$x = \frac{1}{2}(x + y) + \frac{1}{4} \text{sen}(2x + 2y) + C$
e.	$\frac{dy}{dx} = 2 + \sqrt{y - 2x + 3}$	R:	$x = 2\sqrt{y - 2x + 3} + C$

9.- Determine la familia de curvas que tienen trayectorias isogonales con:

a.	$y(x + c) = 1$	a	45°	R:	$y - 2tg^{-1}y = x + c_1$
b.	$y = ce^{ax}$	a	45°	R:	$y + \frac{2}{a} \ln ay - 1 = x + c_1$

10.-Determine la familia de curvas que tienen trayectorias ortogonales con:

a.	$y^2 = cx^3$	R:	$3y^2 + 2x^2 = c_1$		
b.	$xy = c$	R:	$\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} = c_1$		
c.	$y = cx^2$	R:	$y^2 + \frac{x^2}{2} = c_1$		
d.	$x^2 - y^2 = c$	R:	$y = \frac{c_1}{x}$		
e.	$y^2 = cx$	R:	$\frac{y^2}{2} + x^2 = c_1$		
f.	$x + y = c_1e^y$	que pasa por	$(0, 5)$	R:	$y = -x + 2 + 3e^{-x}$

UNIVERSIDAD DE ORIENTE
 NÚCLEO BOLÍVAR
 UNIDAD DE ESTUDIOS BÁSICOS
 ÁREA DE MATEMÁTICAS
 MATERIA: MATEMÁTICAS IV
 PROF: JOSÉ GREGORIO PÁEZ V.

UNIDAD II.
 ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR
 EJERCICIOS

1.- Dada la familia de soluciones para la ecuación diferencial, determine un miembro de la familia que satisfaga las condiciones iniciales.

a. $y'' - y' = 0 \quad y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$
 para $y(0) = 0 \quad y' (0) = 1 \quad R : C_1 = 1/2 \quad C_2 = -1/2$

b. $y'' - 2y' + 2y = 0 \quad y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x$
 para $y(0) = 1 \quad y'(\pi/2) = 1 \quad R : C_1 = 1 \quad C_2 = e^{-\pi/2}$

2.- Compruebe que la familia biparamétrica de funciones dadas sea la solución general de la ecuación diferencial no homogénea en el intervalo indicado

a. $y'' - 7y' + 10y = 24e^x \quad \text{siendo} \quad y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{5x} + 6e^x$
 en $(-\infty, +\infty)$

b. $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x} + 4x - 12 \quad \text{siendo} \quad y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + x^2 e^{2x} + x - 2$
 en $(-\infty, +\infty)$

3.- Determine una segunda solución en cada ecuación diferencial. Use reducción de orden.

a. $y'' + 5y' = 0 \quad \text{siendo} \quad y_1 = 1$

R : $y_2 = -\frac{1}{5} C \cdot e^{-5x}$

b. $y'' + 16y = 0 \quad \text{siendo} \quad y_1 = \cos(4x)$

R : $y_2 = \frac{1}{4} C \cdot \sin(4x)$

c. $y'' - y = 0 \quad \text{siendo} \quad y_1 = \cosh(x)$

R : $y_2 = C \cdot \sinh(x)$

$$d. \quad 9y'' - 12y' + 4y = 0 \quad \text{siendo} \quad y_1 = e^{2x/3}$$

$$R: \quad y_2 = C \cdot x e^{2x/3}$$

$$e. \quad xy'' + y' = 0 \quad \text{siendo} \quad y_1 = \ln(x)$$

$$R: \quad y_2 = C$$

4.- Determine la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales.

$$a. \quad y'' + 9y = 0$$

$$R: \quad y = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)$$

$$b. \quad y'' + 8y' + 16y = 0$$

$$R: \quad y = C_1 e^{-4x} + C_2 x e^{-4x}$$

$$c. \quad 3y'' + 2y' + y = 0$$

$$R: \quad y = e^{-x/3} \left[C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x\right) \right]$$

$$d. \quad y''' - 4y'' - 5y' = 0$$

$$R: \quad y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{5x}$$

$$e. \quad y''' - y = 0$$

$$R: \quad y = C_1 e^x + e^{-x/2} \left[C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_3 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right]$$

$$f. \quad 16y^{iv} + 24y''' + 9y'' = 0$$

$$R: \quad y = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{24}{32}}x\right) + C_2 x \cos\left(\sqrt{\frac{24}{32}}x\right) + C_3 \sin\left(\sqrt{\frac{24}{32}}x\right) + C_4 x \sin\left(\sqrt{\frac{24}{32}}x\right)$$

$$g. \quad y^{v} - 16y' = 0$$

$$R: \quad y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x} + C_4 \cos(2x) + C_5 \sin(2x)$$

$$h. \quad y^{v} + 5y^{iv} - 2y''' - 10y'' + y' + 5y = 0$$

$$R: \quad y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-x} + C_4 x e^{-x} + C_5 e^{-5x}$$

5.- Resuelva las siguientes ecuaciones:

a. $y'' - 10y' + 25y = 30x + 3$

R: $y = C_1 e^{5x} + C_2 x e^{5x} + \frac{6}{5}x + \frac{3}{5}$

b. $y'' + 3y = -48x^2 e^{3x}$

R: $y = C_1 \cos(\sqrt{3}x) + C_2 \operatorname{Sen}(\sqrt{3}x) + e^{3x}(-4x^2 + 4x - 4/3)$

c. $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 3 + e^{x/2}$

R: $y = C_1 e^{x/2} + C_2 x e^{x/2} + 12 + \frac{1}{2}x^2 e^{x/2}$

d. $y'' + 2y' + y = \operatorname{Sen}(x) + 3\operatorname{Cos}(2x)$

R: $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} - \frac{1}{2}\operatorname{Cos}(x) - \frac{9}{25}\operatorname{Cos}(2x) + \frac{36}{75}\operatorname{Sen}(2x)$

e. $y''' - 3y'' + 3y' - y = x - 4e^x$

R: $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x - x - 3 - \frac{2}{3}x^3 e^x$

f. $y^{iv} + 2y'' + y = (x-1)^2$

R: $y = C_1 \operatorname{Cos}(x) + C_2 x \operatorname{Cos}(x) + C_3 \operatorname{Sen}(x) + C_4 x \operatorname{Sen}(x) + x^2 - 2x - 3$

g. $y'' + 4y = -2$, sujeta a $y(\pi/4) = 1/2$, $y'(\pi/4) = 2$

R: $y = \frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{Sen}(2x) - \frac{1}{2}$

6.- Encuentre la solución general de:

a. $y'' + 6y' + 9y = -x e^{4x}$

R: $y = \frac{2}{343}e^{4x} - \frac{1}{49}x e^{4x} + C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}$

b. $y'' - y = x^2 e^x + 5$

R: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x - 5 + \frac{1}{4}x e^x - \frac{1}{4}x^2 e^x + \frac{1}{6}x^3 e^x$

c. $y'' - 2y' + 5y = e^x \cdot \text{Sen}(x)$

R: $y = e^x [C_1 \text{Cos}(2x) + C_2 \text{Sen}(2x)] + \frac{1}{3} e^x \text{Sen}(x)$

d. $y'' + y' + y = x \cdot \text{Sen}(x)$

R: $y = e^{-x/2} \left[C_1 \text{Cos} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x \right) + C_2 \text{Sen} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x \right) \right] + 2 \text{Cos}(x) + \text{Sen}(x) - x \text{Cos}(x)$

e. $y''' + 8y'' = -6x^2 + 9x + 2$

R: $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-8x} + \frac{11}{256} x^2 + \frac{168}{768} x^3 - \frac{1}{16} x^4$

f. $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x - x + 16$

R: $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x - 13 + x + \frac{1}{6} x^3 e^x$

g. $y^{iv} - 2y''' + y'' = e^x + 1$

R: $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + C_4 x e^x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} x^2 e^x$

h. $y'' - 64y = 16$ sujeta a $y(0) = 1, y'(0) = 0$

R: $y = -\frac{1}{4} + \frac{5}{8} e^{8x} + \frac{5}{8} e^{-8x}$

7. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

a. $y'' + y = \text{Sec}(x)$

R: $y = C_1 \text{Cos}(x) + C_2 \text{Sen}(x) + \text{Cos}(x) \ln |\text{Cos}(x)| + x \text{Sen}(x)$

b. $y'' + y = \text{Cos}^2 x$

R: $y = C_1 \text{Cos}(x) + C_2 \text{Sen}(x) + \frac{1}{3} \text{Cos}^4 x + \text{Sen}^2 x - \frac{1}{3} \text{Sen}^4 x$

c. $y'' - y = \text{Cosh}(x)$

R: $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x \text{Senh}(x)$

$$d. \quad y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^x}$$

$$R: \quad y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + e^{-2x} \ln|1+e^x| + e^{-x} \ln|1+e^x|$$

$$e. \quad y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{1+x^2}$$

$$R: \quad y = C_1 e^x + C_2 x e^x - \frac{1}{2} e^x \ln|1+x^2| + x e^x \operatorname{tg}^{-1}(x)$$

$$f. \quad 3y'' - 6y' + 30y = e^x \operatorname{tg}(3x)$$

$$R: \quad y = e^x [C_1 \operatorname{Cos}(3x) + C_2 \operatorname{Sen}(3x)] - \frac{1}{27} e^x \operatorname{Cos}(3x) \ln|\operatorname{Sec}(3x) + \operatorname{tg}(3x)|$$

$$g. \quad 4y'' - y = x e^{x/2} \quad \text{sujeta a} \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

$$R: \quad y = \frac{3}{2} e^{x/2} - \frac{1}{2} e^{-x/2} - x e^{x/2} + \frac{1}{2} x^2 e^{x/2}$$

$$h. \quad x^3 y''' - 6y = 0$$

$$R: \quad y = x^3 + C_1 \operatorname{Cos}(\sqrt{2} \ln(x)) + C_2 \operatorname{Sen}(\sqrt{2} \ln(x))$$

$$i. \quad x y^{iv} + 6y''' = 0$$

$$R: \quad y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^{-3}$$

$$j. \quad x^2 y'' + x y' + y = 0 \quad \text{sujeta a} \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 2$$

$$R: \quad y = \operatorname{Cos}(\ln x) + 2 \operatorname{Sen}(\ln x)$$

8. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$a. \quad \frac{dx}{dt} = 2x - y$$

$$\frac{dy}{dt} = x$$

$$R: \quad y(t) = (C_1 - C_2) e^t + C_2 t e^t$$

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t$$

b. $x' + y = t$

$$y' + x = -t$$

R : $y(t) = -C_1 e^t + C_2 e^{-t} + t + 1$

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - t - 1$$

c. $x' + y = t$

$$y' - x = -t$$

R : $y(t) = -C_2 \cos(t) + C_1 \sin(t) + t - 1$

$$x(t) = C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t) + t + 1$$

d. $(D^2 + 5)x - 2y = 0$

$$-2x + (D^2 + 2)y = 0$$

R : $x(t) = C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t) + C_3 \cos(\sqrt{6}t) + C_4 \sin(\sqrt{6}t)$

$$y(t) = 2C_1 \cos(t) + 2C_2 \sin(t) - \frac{1}{2}C_3 \cos(\sqrt{6}t) - \frac{1}{2}C_4 \sin(\sqrt{6}t)$$

e. $2Dx + (D - 1)y = t$

$$Dx + Dy = t^2$$

R : $x(t) = -C_1 e^{-t} + C_2 + \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 5t$

$$y(t) = C_1 e^{-t} + 2t^2 - 5t + 5$$

f. $x' + 5x + y = 0$ Dado que $x(1) = 0, y(1) = 1$

$$y' - 4x + y = 0$$

R : $x(t) = e^{-3t+3} + t.e^{-3t+3}$

$$y(t) = -e^{-3t+3} + 2t.e^{-3t+3}$$

UNIVERSIDAD DE ORIENTE
NÚCLEO BOLÍVAR
UNIDAD DE ESTUDIOS BÁSICOS
ÁREA DE MATEMÁTICAS
MATERIA: MATEMÁTICAS IV
PROF: JOSÉ GREGORIO PÁEZ V.

UNIDAD III.
TRANSFORMADA DE LAPLACE
EJERCICIOS

1.- Aplique la definición de transformada a las siguientes funciones:

$$a. f(t) = \begin{cases} -1 & 0 \leq t < 1 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases} \quad R : \frac{1}{s}(2e^{-s} - 1)$$

$$b. f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases} \quad R : \frac{1}{s^2}(1 - e^{-s})$$

$$c. f(t) = \begin{cases} \text{Sen}(t), & 0 \leq t < \pi \\ 0, & t \geq \pi \end{cases} \quad R : \frac{e^{-\pi s} + 1}{s^2 + 1}$$

$$d. f(t) = e^{t+7} \quad R : \frac{e^7}{s-1}$$

$$e. f(t) = t.e^{4t} \quad R : \frac{1}{(s-4)^2}$$

$$f. f(t) = e^{-t} \text{Sen}(t) \quad R : \frac{1}{(s+1)^2 + 1}$$

$$g. f(t) = t.\text{Cos}(t) \quad R : \frac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2}$$

2. Demuestre que:

$$a. L\{\text{Senh}(kt)\} = \frac{k}{(s^2 - k^2)}$$

$$b. L\{e^t \text{Senh}(t)\} = \frac{1}{2(s-2)} - \frac{1}{2s}$$

3. Determine la transformada inversa de:

$$a. \frac{(s+1)^3}{s^4} \quad R : 1 + 3t + \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3$$

$$b. \frac{1}{4s+1} \quad R : \frac{1}{4}e^{-\frac{t}{4}}$$

$$c. \frac{4s}{4s^2+1} \quad R : \text{Cos}(t/2)$$

$$d. \frac{2s-6}{s^2+9} \quad R : 2\text{Cos}(3t) - 2\text{Sen}(3t)$$

$$e. \frac{1}{s^2+3s} \quad R : \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-3t}$$

$$f. \frac{s}{(s-2)(s-3)(s-6)} \quad R : \frac{1}{2}e^{2t} - e^{3t} + \frac{1}{2}e^{6t}$$

$$g. \frac{s}{(s^2+4)(s+2)} \quad R : \frac{1}{4}\text{Cos}(2t) + \frac{1}{4}\text{Sen}(2t) - \frac{1}{4}e^{-2t}$$

$$h. \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} \quad R : \frac{1}{3}\text{Sen}(t) - \frac{1}{6}\text{Sen}(2t)$$

4. Aplique el teorema de traslación y de la derivada para transformar las siguientes funciones:

$$a. t.e^{10t} \quad R : \frac{1}{(s-10)^2}$$

$$b. e^t \cdot \text{Sen}(3t) \quad R : \frac{3}{(s-1)^2+9}$$

$$c. e^{5t} \text{Senh}(3t) \quad R : \frac{3}{(s-5)^2-9}$$

$$d. \quad t(e^t + e^{2t})^2 \quad R: \frac{1}{(s-2)^2} + \frac{2}{(s-3)^2} + \frac{1}{(s-4)^2}$$

$$e. \quad e^{-t} \text{Sen}^2 t \quad R: \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s+1} - \frac{s+1}{(s+1)^2 + 4} \right]$$

$$f. \quad \text{Cos}(2t)U(t-\pi) \quad R: e^{-\frac{\pi}{s}} \left[\frac{s}{s^2 + 4} \right]$$

$$g. \quad t^2 \text{Senh}(t) \quad R: \frac{6s^4 - 4s^2 - 2}{(s^2 - 1)^4}$$

$$h. \quad t.e^{2t}.\text{Sen}(6t) \quad R: \frac{12s - 24}{\left[(s-2)^2 + 36 \right]^2}$$

5.- Aplique la transformada inversa de:

$$a. \quad \frac{1}{(s+2)^3} \quad R: \frac{1}{2} t^2 e^{-2t}$$

$$b. \quad \frac{1}{s^2 - 6s + 10} \quad R: e^{3t} \text{Sen}(t)$$

$$c. \quad \frac{s}{s^2 + 4s + 5} \quad R: e^{-2t} \text{Cos}(t) - 2e^{-2t} \text{Sen}(t)$$

$$d. \quad \frac{s}{(s+1)^2} \quad R: e^{-t} - te^{-t}$$

$$e. \quad \frac{2s-1}{s^2(s+1)^3} \quad R: 5 - t - 5e^{-t} - 4te^{-t} - \frac{3}{2}t^2 e^{-t}$$

$$f. \quad \frac{e^{-\pi s}}{s^2 + 1} \quad R: \text{Sen}(t)U(t-\pi)$$

6. Determine la transformada inversa de las siguientes expresiones, aplicando convolución y sus teoremas.

$$a. \frac{1}{s(s+1)} \quad R: 1 - e^{-t}$$

$$b. \frac{s}{(s^2 + 4)^2} \quad R: \frac{1}{4} t \cdot \text{Sen}(2t)$$

7. Determine la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales.

$$a. y' - y = 1, \quad y(0) = 0 \quad R: -1 + e^t$$

$$b. y' + 4y = e^{-4t}, \quad y(0) = 2 \quad R: te^{-4t} + 2e^{-4t}$$

$$c. y'' + 5y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad R: \frac{4}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-4t}$$

$$d. y'' - 6y' + 9y = t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad R: \frac{10}{9}te^{3t} - \frac{2}{27}e^{3t} + \frac{1}{9}t + \frac{2}{27}$$

$$e. y'' + y = \text{Sen}(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1 \quad R: -\frac{1}{2}t \cdot \text{Cos}(t) + \text{Cos}(t) - \frac{1}{2}\text{Sen}(t)$$

$$f. 2y''' + 3y'' - 3y' - 2y = e^{-t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1$$

$$R: -\frac{8}{9}e^{-t/2} + \frac{1}{9}e^{-2t} + \frac{5}{18}e^t + \frac{1}{2}e^{-t}$$

8. Determine f(t) en las siguientes ecuaciones:

$$a. f(t) + \int_0^t f(T)dT = 1 \quad R: f(t) = e^{-t}$$

$$b. f(t) = 1 + t - \frac{8}{3} \int_0^t (T-t)^3 f(T)dT \quad R: \frac{3}{8}e^{2t} + \frac{1}{8}e^{-2t} + \frac{1}{2}\text{Cos}(2t) + \frac{1}{4}\text{Sen}(2t)$$

UNIVERSIDAD DE ORIENTE
 NÚCLEO BOLÍVAR
 UNIDAD DE ESTUDIOS BÁSICOS
 ÁREA DE MATEMÁTICAS
 MATERIA: MATEMÁTICAS IV
 PROF: JOSÉ GREGORIO PÁEZ V.

UNIDAD IV.
 SERIES Y SUCESIONES.
 EJERCICIOS

1.- Determine en las siguientes sucesiones, si es convergente o divergente:

$$a. \left\{ \frac{n^2 + 1}{n} \right\} \quad R : Diverge, L = \infty$$

$$b. \left\{ \frac{3 - 2n^2}{n^2 - 1} \right\} \quad R : Converge, L = -2$$

$$c. \left\{ \frac{\ln(n)}{n^2} \right\} \quad R : Converge, L = 0$$

$$d. \left\{ \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}} \right\} \quad R : Converge, L = 1$$

$$e. \left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} - n} \right\} \quad R : Diverge, L = \infty$$

$$f. \left\{ \left(1 + \frac{1}{3n} \right)^n \right\} \quad R : Converge, L = e^{1/3}$$

$$emplee \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e$$

2.- Determine si las siguientes sucesiones, son monótonas o no monótonas:

$$a. \left\{ \frac{3n - 1}{4n + 5} \right\} \quad R : Monótona creciente$$

$$b. \left\{ \frac{1 - 2n^2}{n^2} \right\} \quad R : Monótona decreciente$$

$$c. \left\{ \cos \left(\frac{n\pi}{3} \right) \right\} \quad R : No monótona$$

$$d. \left\{ \frac{1}{n + \operatorname{Sen}(n^2)} \right\} \quad R : No monótona$$

$$e. \left\{ \frac{5^n}{1 + 5^{2n}} \right\} \quad R : Monótona decreciente$$

3.- Determine si $\left\{ \frac{n^2 + 3}{n + 1} \right\}$ es acotada o no acotada. R : No acotada.

4.- En las siguientes series halle la suma:

$$a. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \quad R : S_n = \frac{n+1}{2n+3}$$

$$b. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{(3n+1)(3n-2)} \quad R : S_n = \frac{5}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+4} \right)$$

$$c. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{n}{n+1} \right) \quad R : S_n = -\ln(n+2)$$

$$d. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5^{n-1}} \quad R : S_n = \frac{5}{2} \left(1 - \frac{1}{5^n} \right)$$

5.- Verificar si las siguientes series convergen o divergen.

$$a. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} \quad R : \text{Converge}$$

$$b. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \quad R : \text{Diverge}$$

$$c. \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-5n} \quad R : \text{Converge}$$

$$d. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n} \quad R : \text{Diverge}$$

6.- Estudie las siguientes series alternas:

$$a. \quad \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln(n)} \quad R : \text{Converge}$$

$$b. \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3 + 2} \quad R : \text{Converge}$$

$$c. \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{n^2} \quad R : \text{Diverge}$$

$$d. \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n} \quad R : \text{Converge}$$

7.- Determine el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencia:

$$a. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} \quad R : [-1, 1)$$

$$b. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot x^n}{n^2} \quad R : [-1/2, 1/2]$$

$$c. \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad R : (-\infty, +\infty)$$

$$d. \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n} \quad R : (0, 2]$$

8.- Determine el dominio de f' si

$$a. \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \quad R : \text{Dom } f'(x) : [-1, 1)$$

$$b. \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n \cdot 3^n} \quad R : \text{Dom } f'(x) : (-2, 4)$$

9.- Determine el resultado correcto a dos decimales de las siguientes integrales:

$$a. \quad \int_0^1 e^{-x^2} dx \quad R : 0,74$$

$$b. \quad \int_0^1 x \cdot \text{Senh} \sqrt{x} dx \quad R : 0,44$$

10.- Determine por medio de series de potencia el resultado correcto, a dos decimales, de los siguientes enunciados:

$$a. \quad e^1 \quad R : 2,71$$

$$b. \quad \text{tg}^{-1} \left(\frac{1}{2} \right) \quad R : 0,46$$