

RESUMEN DE CRITERIOS SOBRE CONVERGENCIA Y DIVERGENCIA DE SERIES INFINITAS

A fin de adquirir destreza en el reconocimiento y aplicación del criterio apropiado, se requiere de práctica considerable, la cual se obtendrá realizando los ejercicios de la guía respectiva. Como ayuda, se listan a continuación los criterios y se aconseja que sean aplicados en el orden indicado. Si un paso en particular no es aplicable o no puede inferirse ninguna conclusión, continúe con el siguiente. En ocasiones pueden aplicarse más de un criterio, sin embargo, es importante que elija el más eficaz.

1.- Calcule $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) \neq 0$, entonces la serie diverge. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = 0$, no puede inferirse ninguna conclusión.

2.- Examine la serie a fin de determinar si corresponde a uno de los siguientes tipos especiales:

(i) Una serie geométrica: $\sum_{n=1}^{+\infty} a \cdot r^{n-1}$. Converge a la suma $\frac{a}{1-r}$ si $|r| < 1$; diverge si $|r| \geq 1$.

(ii) Una serie p: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ (donde p es una constante). Converge si $p > 1$; diverge si $p \leq 1$.

(iii) Una serie alternante: $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n$ ó $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot a_n$ Si $a_n > 0$, y $a_{n+1} < a_n$ para todos los números enteros positivos n, y si $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, entonces la serie alternante es convergente.

3.- Aplique el criterio de la razón, Sea $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ una serie infinita para la cual u_n es diferente de cero:

(i) si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = L < 1$, la serie es absolutamente convergente;

(ii) si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = L > 1$, o si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = +\infty$, la serie es divergente;

(iii) si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = 1$, nada se puede inferir acerca de la convergencia a partir de este criterio.

4.- Aplique el criterio de la raíz: Sea $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ una serie infinita para la cual cada u_n es diferente de cero:

(i) si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = L < 1$, la serie es absolutamente convergente;

(ii) si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = L > 1$, o si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = +\infty$ la serie es divergente;

(iii) si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = 1$, nada se puede inferir acerca de la convergencia a partir de este criterio.

5.- Aplique el criterio de la integral: Sea f una función que es continua, decreciente y de valores positivos para toda

$x \geq 1$. Entonces la serie infinita $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n) + \dots$ es convergente si la integral

impropia $\int_1^{+\infty} f(x) \cdot dx$ existe, y es divergente si $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b f(x) \cdot dx = +\infty$.

6.- Aplique el criterio de comparación: Sea la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ una serie de términos positivos.

(i) Si $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ es una serie de términos positivos de la cual se sabe que converge, y si $u_n \leq v_n$ para todo número entero positivo n, entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ es convergente.

(ii) Si $\sum_{n=1}^{+\infty} w_n$ es una serie de términos positivos de la cual se sabe que diverge, y si $u_n \geq w_n$ para todo número entero positivo n, entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ es divergente.

o aplique el criterio de comparación por paso al límite: Sean $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ dos series de términos positivos.

(i) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = c > 0$, entonces las dos series son convergentes o ambas series son divergentes.

(ii) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ y si $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge.

(iii) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty$ y si $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ diverge.

Adaptado por: Prof. José Gregorio Páez Veracierta Fuente: Luois Leithold, Cálculo con Geometría Analítica, 7ma. Edición.